FACULDADE · DE · CIÊNCIAS UNIVERSIDADE · DE · LISBOA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Teorema de Pitágoras

Novas Tecnologias no Ensino da Matemática

2º semestre 2004/2005

Patrícia Alexandra Simões Lopes

n.º 27830

Índice:

Introdução:

- Introdução Histórica

Pitágoras (585-500 a.C.) foi um filósofo e matemático grego que fundou a Escola Pitagórica, onde se estudava geometria, aritmética, astronomia e música.

Diz-se que o símbolo da Escola Pitagórica era a estrela de 5 pontas e o seu lema era "Tudo é número", ou seja para os pitagóricos tudo no Universo era regido pelos números e suas relações.

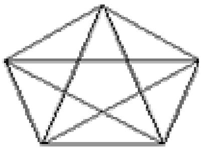


Fig. 1 – Pentagrama

Alguns historiadores consideram que Pitágoras não enunciou, nem demonstrou este teorema. Existem provas que o Teorema de Pitágoras já era conhecido por outras culturas. Por exemplo, os hindus (documento Sulva-Sutra) no séc. VII a. C.; os babilónios aplicavam o teorema 2000 a.C., mas não se conhece a sua demonstração; os egípcios conheciam o resultado para o triângulo rectângulo de lados 3,4,5. Por isso, algumas pessoas asseguram que, durante as visitas ao Egipto, Pitágoras conheceu o enunciado e dedicou-se à sua demonstração.

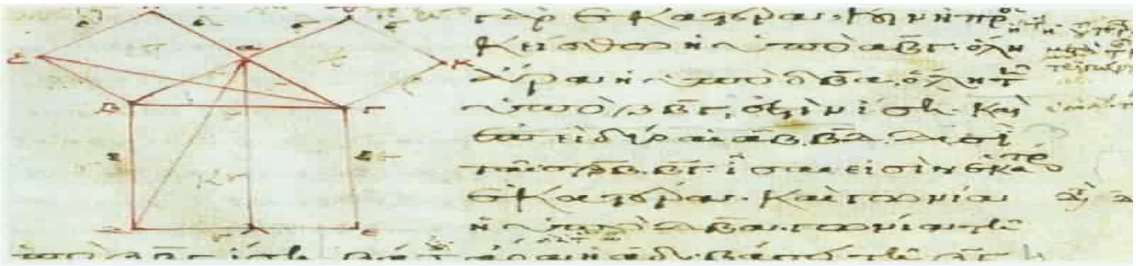


Fig. 2 – Teorema de Pitágoras nos “Elementos” de Euclides.

Diz a lenda que Pitágoras teria sacrificado cem bois aos deuses como agradecimento pela sua descoberta, mas isto parece improvável, pois uma das regras da Escola Pitagórica era o vegetarianismo.

Outra lenda diz que Pitágoras estava a passear, e a sua atenção centrou-se nos desenhos sobre um pavimento ladrilhado. Os ladrilhos eram quadrados e estes estavam decompostos pelas suas diagonais em triângulos congruentes, como a figura mostra:

Fig. 3 – Como Pitágoras descobriu a demonstração do teorema.

Actualmente existem mais de 1000 demonstrações do Teorema de Pitágoras.

- Introdução ao Trabalho

Sabendo que o enunciado dos antigos gregos do Teorema de Pitágoras é:

a área do quadrado construído sobre a hipotenusa, de um triângulo rectângulo, é igual à soma das áreas dos dois quadrados construídos sobre os catetos.

Actualmente, dizemos que este teorema tem o seguinte enunciado:

Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

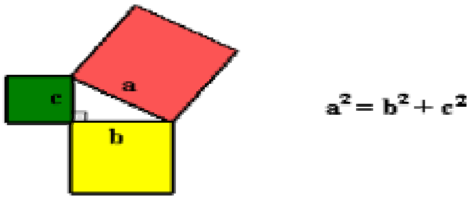


Fig. 4 – Esquema do resultado do Teorema de Pitágoras.

Aplicar o Teorema de Pitágoras para resolver problemas, no plano e no espaço faz parte do programa do 8º ano.

Quadro 1- Temática do 8º ano: Decomposição de Triângulos e Teorema de Pitágoras.

Especificação dos temas	Objectivos
• Decomposição de polígonos em triângulos e quadriláteros - decomposição de um triângulo por uma mediana - decomposição de um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa - equivalência de polígonos; área do trapézio • **Teorema de Pitágoras** **- demonstração por decomposição de um quadrado** • **Teorema de Pitágoras e o espaço** **- perpendicularidade entre recta e plano** **- perpendicularidade de planos** **- diagonal do paralelepípedo rectângulo**	• Decompor um polígono em triângulos e quadriláteros e relacionar entre si as figuras obtidas. • Por composição de figuras, obter uma figura dada. • Resolver problemas, relacionando entre si propriedades das figuras geométricas. • Inventar um *puzzle* geométrico. • Resolver problemas utilizando o processo de tentativa e erro. • **Resolver problemas, no plano e no espaço, aplicando o teorema de Pitágoras**, recorrendo à calculadora sempre que aconselhável. • Justificar a semelhança entre os triângulos obtidos ao traçar a altura referente à hipotenusa num triângulo rectângulo. • Verificar se uma mediana é eixo de simetria num triângulo dado. • Determinar o baricentro de um triângulo. • Identificar rectas perpendiculares a planos e planos perpendiculares a planos em modelos concretos. • Colaborar num pequeno trabalho sobre história da matemática.

Este trabalho está dividido em duas partes essenciais:

- <u>exercício interactivo</u>, no qual se pretende que os alunos apliquem o Teorema de Pitágoras para :
    1) a construção de 1 triângulo rectângulo, com valores dados para os seus lados;
    2) a determinar o valor da sua hipotenusa.

- <u>demonstração do Teorema de Pitágoras</u> por decomposição de quadrados.

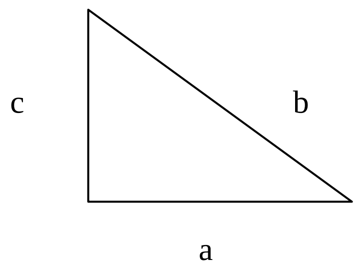
Relatório:

- Exercício Interactivo

<u>Enunciado</u>:

Construir um triângulo rectângulo em que um dos catetos mede 6 m e o outro 8m. Determina a sua hipotenusa.

<u>Resolução</u> (no papel):



Por hipótese, temos que a = 6 m e c = 8 m.

Pelo Teorema de Pitágoras, $b^2 = c^2 + a^2$.

Então, $b^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow b^2 = 100 \Rightarrow b = \sqrt{10^2} \Rightarrow b = 10$

Logo, o valor da hipotenusa é de 10 m.

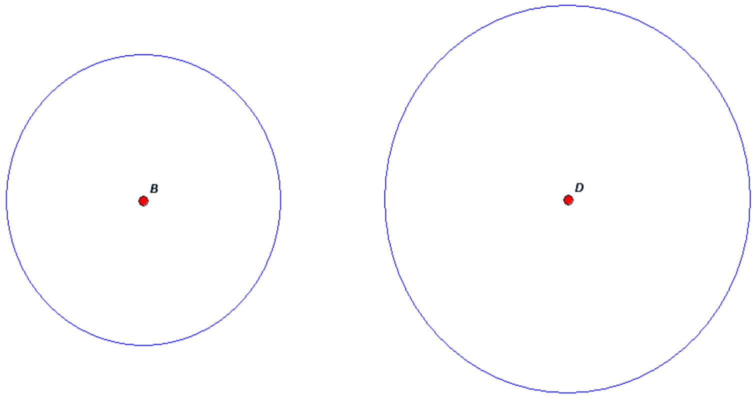
OBS.: se a = 8 e c = 6 o resultado mantinha-se, ou seja b = 10

Resolução (no programa *Cinderella*):

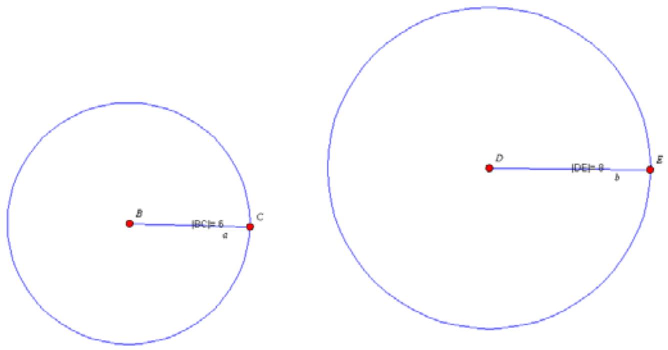
Vamos fazer passo-a-passo:

- Construir a circunferência C1 de raio fixo 6, e outra circunferência C2 de raio fixo 8:

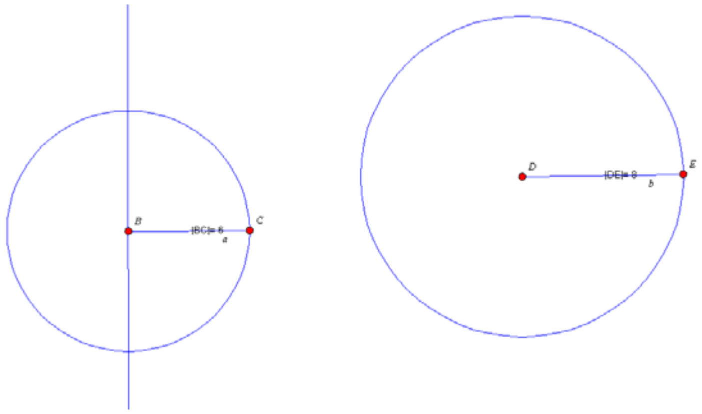
C1 C2



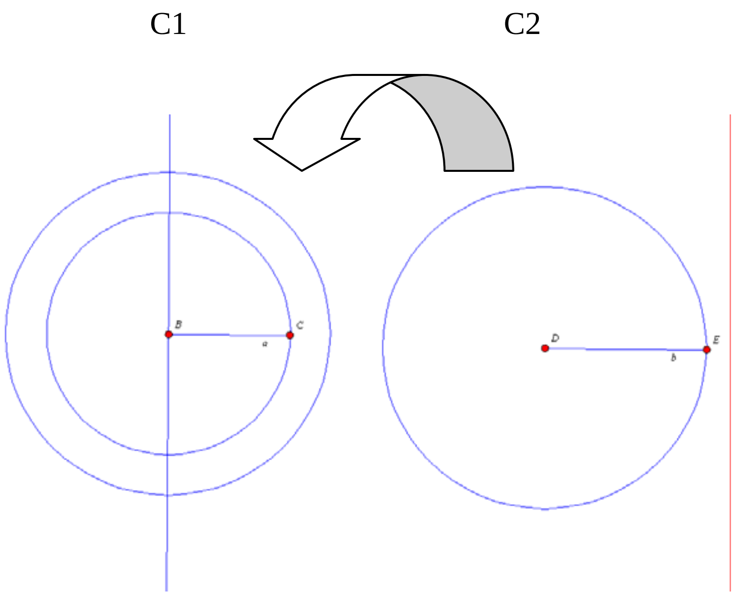
- Construir os segmentos BC e DE:



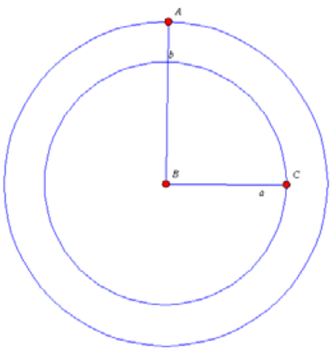
- Construir a recta perpendicular a BC em B:



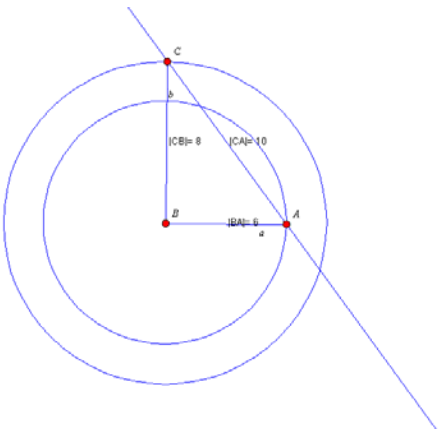
- Utilizando o “compasso” transferir a circunferência C2 para a circunferência C1:



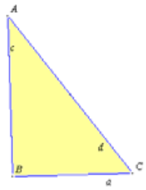
- A intersecção da circunferência C2 com a recta perpendicular a BC para achar o ponto A:



- Traçamos a recta AC e medimos o segmento AC:



- Usando a propriedade da “opacidade” escondemos as circunferências, e podemos diminuir o tamanho dos pontos:



Assim, construímos o triângulo que nos é pedido e, ao mesmo tempo, calculamos a hipotenusa (BC = 10)

OBS.: esta é a resolução da solução1.

i) construção do exercício

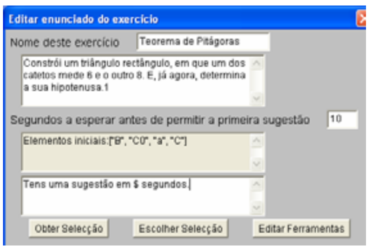
Quadro 2: texto de construção do trabalho

<table>
<tr><th>Quem?</th><th>O quê?</th><th>Onde?</th></tr>
<tr><td>B</td><td>Ponto(0,72|7,08)</td><td>(0,72|7,08)</td></tr>
<tr><td>C0</td><td>Circunferência(B;0)</td><td>$(x - 0,72)^2 + (y - 7,08)^2 = 6^2$</td></tr>
<tr><td>G</td><td>Ponto(19,36|9,84)</td><td>(19,36|9,84)</td></tr>
<tr><td>C1</td><td>Circunferência(G;0)</td><td>$(x - 19,36)^2 + (y - 9,84)^2 = 8^2$</td></tr>
<tr><td>a</td><td>LineThrough(B;0,39°)</td><td>y = 0,01x + 7,08</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Intersecção(C0;a)</td><td>(6,72|7,12)</td></tr>
<tr><td>D</td><td>Ponto em(C1;-88,9°)</td><td>(19,21|17,84)</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Ligar(G;D)</td><td>y = -51,75x + 1011,72</td></tr>
<tr><td>E</td><td>Ponto Médio(B;C)</td><td>(3,72|7,1)</td></tr>
<tr><td>dist0</td><td>Distância(B;C)</td><td>6</td></tr>
<tr><td>F</td><td>Ponto Médio(G;D)</td><td>(19,28|13,84)</td></tr>
<tr><td>dist1</td><td>Distância(G;D)</td><td>8</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Recta(a;B;90°)</td><td>y = -148x + 113,64</td></tr>
<tr><td>C2</td><td>Compasso(D;G;B)</td><td>$(x - 0,72)^2 + (y - 7,08)^2 = 8^2$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>Intersecção(C2;c)</td><td>(0,67|15,08)</td></tr>
<tr><td>d</td><td>Ligar(A;C)</td><td>y = -1,31x + 15,96</td></tr>
<tr><td>H</td><td>Ponto Médio(B;A)</td><td>(0,69|11,08)</td></tr>
<tr><td>K</td><td>Ponto Médio(C;A)</td><td>(3,69|11,1)</td></tr>
<tr><td>dist2</td><td>Distância(C;A)</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Poly0</td><td>Polígono(A,B,C)</td><td>_</td></tr>
<tr><td>Text0</td><td>Texto(dist0,E)</td><td>|BC|= 6</td></tr>
<tr><td>Text1</td><td>Texto(dist1,F)</td><td>|GD|= 8</td></tr>
<tr><td>Text2</td><td>Texto(dist1)</td><td>|AB|= 8</td></tr>
<tr><td>Text3</td><td>Texto(dist1,H)</td><td>|AB|= 8</td></tr>
<tr><td>Text4</td><td>Texto(K,dist2)</td><td>|AC|= 10</td></tr>
</table>

ii) Editando o exercício

- Definir o input

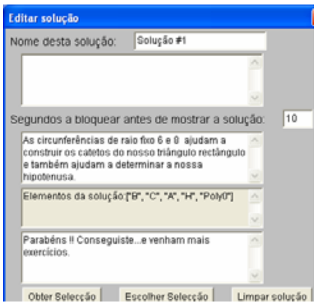
Abrir o **editor de exercícios**.
Preencher o “editar enunciado do exercício”.



Seleccionamos o ponto B, a circunferência C0 e no raio BC. Em seguida, clicamos em “obter selecção”.
Vamos ao “editar ferramentas” e escolhemos as ferramentas que o utilizador pode usar.
Fechar o “editor de exercícios”.

- Definir soluções

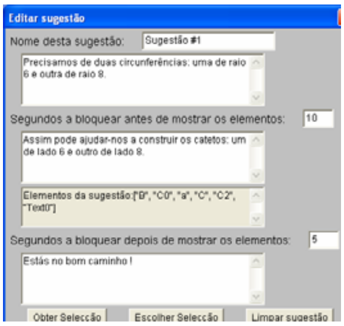
Clicar em “adicionar solução”.
Com um duplo clique abrimos “editar solução”:



Fechar “editar solução”.

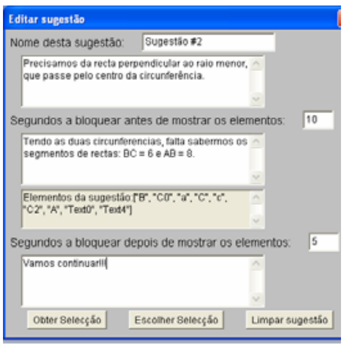
- Definir sugestões

Voltando ao “editor de exercícios”, podemos clicar em “adicionar sugestão”:



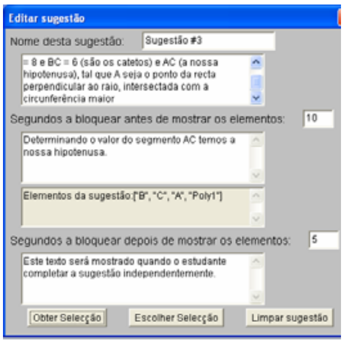
Fechar a sugestão 1.

Se o aluno tiver dúvidas podemos fornecer-lhe outra sugestão.



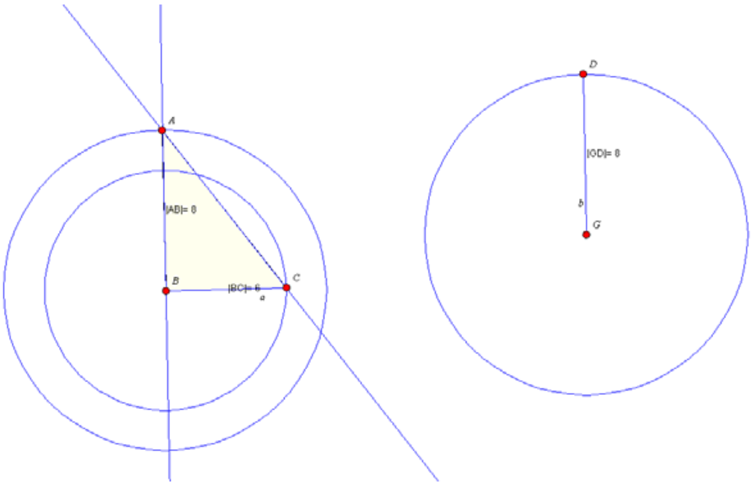
Fechar sugestão 2.

Se o aluno ainda tiver dúvidas, podemos ajudá-lo, com outra sugestão:

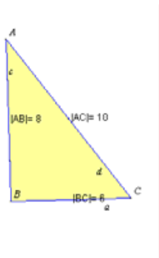


Fechar a sugestão 3.

Assim, chega à conclusão:

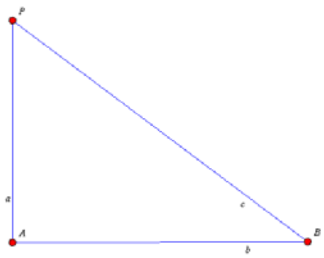


Portanto, a hipotenusa AC = 10, em que os catetos do triângulo rectângulo são AB = 8 e BC = 6.



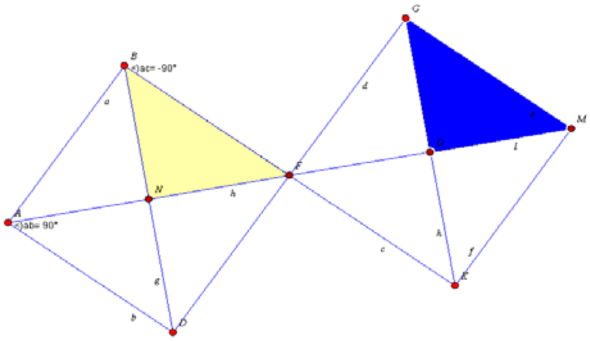
❖ Demonstração (por construção)

Dado um triângulo rectângulo ABP.

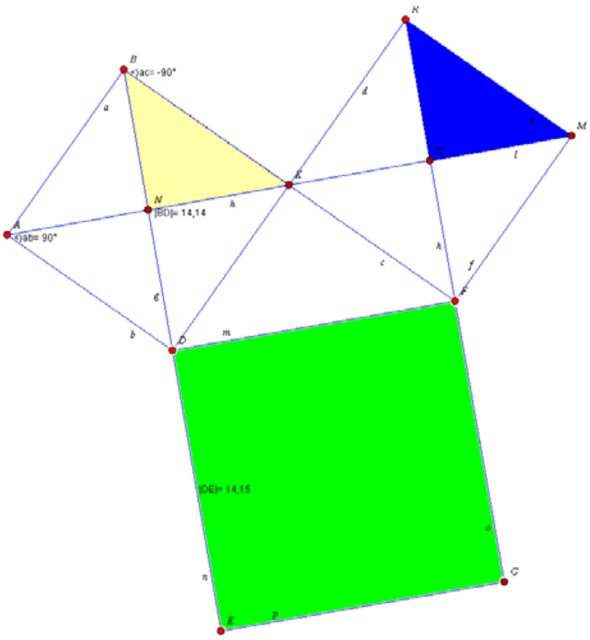


Construímos dois quadrados semelhantes, cada um com 4 triângulos rectângulos ABP. Sejam Q1 e Q2 esses quadrados.

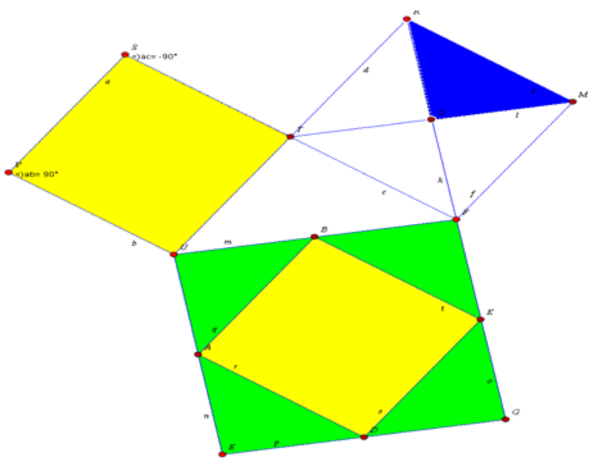
Q1 Q2



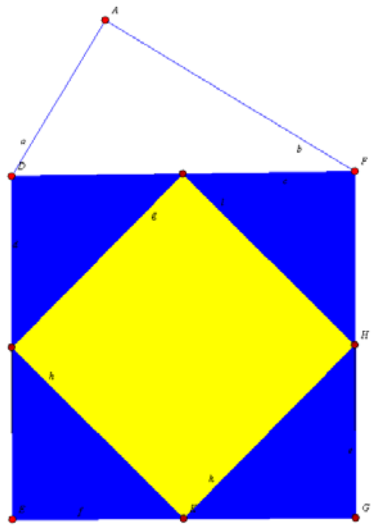
Construímos outro quadrilátero DEFG, em que o lado DF do quadrilátero coincide com o lado DF do triângulo DFK.



Colocamos o quadrado Q1 no quadrilátero DEFG.



Colocamos cada triângulo do quadrado Q2 no quadrilátero, preenchendo assim o quadrilátero DEFG.



Logo, a soma das áreas dos quadrados Q1 e Q2 é a área de DEFG.

OBS.: esta é uma demonstração pouco rigorosa, mas de fácil compreensão para qualquer aluno que frequente o ensino básico até ao secundário. Também podemos utilizar recortes em papel para ajudar a visualizar esta demonstração.

Conclusão:

Foi a primeira vez que trabalhei com o programa *Cinderella*. Considero que foi bastante útil, pois é de fácil manuseamento e permite resolver diversos tipos de problemas. O teorema de Pitágoras foi sempre um tópico que me suscitou interesse, por isso, decidi reflectir um pouco mais. Acredito que podia ter feito melhor, mas antes simples do que demasiado complexo para mostrar aos meus futuros alunos.

FIM